

「 $\sqrt{2}$ が無理数であることの理解ができるようにするには」

No. 43090 分数を小数へ（拡大可）

① 本時のねらい

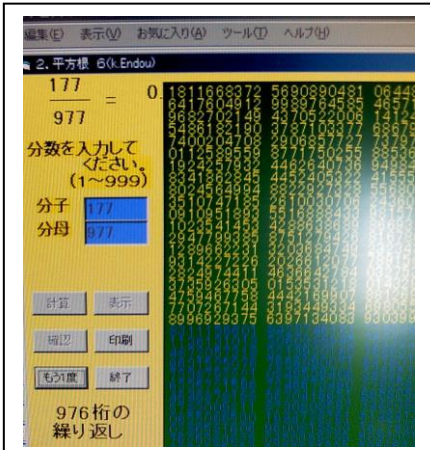
分数が有限小数や無限小数（循環小数）で表されることを実感することを通して、無限小数の $\sqrt{2}$ が分数でないことの証明の必要性に気づき、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを理解することができる。

② コンピュータ活用の意図

$\sqrt{2}$ が無理数であることは背理法によって証明される。このことは、 $\sqrt{2}$ が分数ではないことの理解を通してなされる。そのためには、生徒が「 $\sqrt{2}$ が本当に循環小数ではないのだろうか。」という疑問をもたなくてはならない。では、どのように、その疑問をもたせればよいのだろうか。

そこで、分数を小数で表すことができるソフトを用いて循環小数を十分に体験することができるようにする。このソフトでは、小数が何百桁にも循環していることを体験できる。本単元の導入で生徒は、数十桁の小数が循環しないことをもとに $\sqrt{2}$ が新しい数であることを理解している。したがって、生徒は小数が何百桁にも循環することを目の当たりにして、「 $\sqrt{2}$ が本当に循環小数ではないのだろうか。」という疑問をもつことになる。

③ 実践

| 教師の働きかけ | 実際の生徒の活動 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>○ 次の分数を小数で表してみよう。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $\frac{1}{5} = \frac{5}{8}$ $\frac{5}{3} = \frac{1}{7}$ </div> | <p>○ ひっ算を用いて分数を小数で表した。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $\frac{1}{5} = 0.2 \qquad \frac{5}{8} = 0.625$ $\frac{5}{3} = 1.6666\cdots \qquad \frac{1}{7} = 0.142857142857\cdots$ </div> <p>・ 1.666...や0.14285714...は、同じ数の並びが繰り返される。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>終わりのある小数を有限小数，どこまでも続く小数を無限小数，繰り返し現れる無限小数を循環小数という。</p> </div> |
| <p>○ 分数が有限小数や循環小数であることを確認しよう。</p> | <p>○ シミュレーションソフトで有限小数や循環小数を体験した。</p> <p>このソフトは、分母と分子をそれぞれ1～999の範囲で入力することができる。その後、小数点以下が自動的に計算される。さらに、循環する小数がまとまりごとに色を分けて表示することができるとともに、循環される桁数が表示される。</p> <p>左の写真は976桁の循環を表している。</p> <p>○ 有限小数や循環小数を分数で表した。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;">  </div> |

- 有限小数や循環小数を分数で表してみよう。

$$\begin{array}{r}
 0.2 \\
 = \frac{2}{10} \\
 = \frac{1}{5}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10x = 3.3333\cdots \\
 -) x = 0.333\cdots \\
 \hline
 9x = 3 \\
 x = \frac{1}{3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1000000x = 142857\cdots \\
 -) \quad \quad \quad x = 0.142857\cdots \\
 \hline
 999999x = 142857 \\
 x = \frac{142857}{999999} \\
 x = \frac{1}{7}
 \end{array}$$

・循環小数は分数で表すことができる。

- $\sqrt{2}$ は分数ではないこと。つまり、循環小数ではないことを理解しよう。

- $\sqrt{2}$ は循環しない小数とあったが、本当に循環しないのだろうか。

課題 $\sqrt{2}$ が循環しない無限小数であることを理解しよう。

- $\sqrt{2}$ が分数ではないことを証明すればよいことを理解した。

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ とする。ただし、 $\frac{a}{b}$ はこれ以上約分できない。

両辺を2乗する。

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdots \textcircled{1}$$

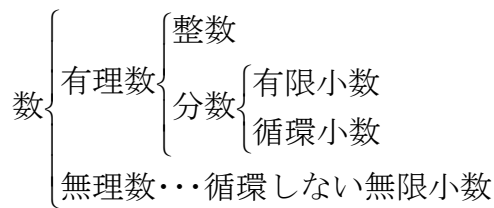
$$2 = \frac{a \times a}{b \times b} \quad \frac{a}{b} \text{ は約分できないので } \textcircled{1} \text{ が矛盾している。}$$

この不合理は、初めの仮定が誤りであることを示している。よって $\sqrt{2}$ は分数ではない。

- これまで学んできた数についてまとめよう。

- $\sqrt{2}$ はこれまでのような数とは違う数であることを理解した。

分数で表せる数を有理数といい、有理数ではない数を無理数という。



④ 授業の様子



<シミュレーションに取り組む様子>

【生徒の感想】

- ・ 分数を小数に直す計算が、自分達ではできないこともあります。それを、シミュレーションだと速くて簡単にできました。時間の短縮にもなりました。
- ・ 自分で分数を選んで、確かめることができると楽しいと思いました。一つ終わった後に、他の分数はどうなっているのだろうと、またやりたいと思いました。数字が少し違うだけで、循環しなかったり、短い循環だったり、とても長い循環だったり、発見やおどろきがありました。
- ・ たくさんの小数の循環を見つけたときはとてもうれしいので、達成感がありました。もっとたくさんの循環を見つけないと思いました。
- ・ 長い循環を見つけるためにひっ算を自分ですると、多分どこかで間違えてやり直しをすることになると思います。シミュレーションだとその心配はありません。
- ・ 色分けがされていて、とてもきれいでした。

⑤ 授業を終えて

○成果

- ・ 生徒は、 $1/3$ や $1/6$ が小数に表したときに循環することを知っている。また、導入で $1/7$ を扱い、いくつかの数字のまとまりが繰り返し現れることを知る。しかし、それは一つの体験に過ぎない。今回、シミュレーションを使うことで、分数の循環の不思議さや面白さを楽しく学習することができた。
- ・ $\sqrt{2}$ が循環しない小数であることを体験的に学習している生徒は、900桁を越える循環小数を目の当たりにして、 $\sqrt{2}$ が本当に循環しない小数なのか疑問を抱くことになった。これによって、背理法による $\sqrt{2}$ が分数でないことの証明に必然をもたせることができた。
- ・ 小学校で学習した小数を分数に直す方法では循環小数は分数に直せないことから、その方法に興味をもって取り組むことができた。

●課題

- ・ シミュレーションが中心にならないように、時間の配慮をしたい。
- ・ シミュレーションが効果的に使われるようにひっ算を体験させてから、シミュレーションを扱うようにした。活用するタイミングを考えたい。
- ・ 循環小数を分数に直すことを丁寧に扱うためには、2時間の指導計画で実施することが適当である。