東海地方数学教育会　第 69 回研究（岐阜）大会資料

【関数】表，式，グラフを相互に関連付けて考察する生徒の育成

～2 つの数量の変化のようすに着目して～

関市立桜ヶ丘中学校　石原　彰哉

1　主題設定について

関市中学校数学部会は，令和元年度より関数領域における実践を重ねてきた。これまで関数領域の学習では，ともなって変わる 2 つの数量 x，y について，表，グラフ，式で表すことを大切にしてきた。そして，その 3 つを相互に関連させて指導することによって，生徒の関数を理解する力を高めてきた。

そうした中，令和元年度全国学力・学習状況調査で，関数領域に関わって大きく 2 つの問題が出題された。

$\boxed{4}$ 下の表は，y が x に反比例する関係を表したものです。y を x の式で表しなさい。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	2	3	6	×	−6	−3	−2	…

$\boxed{6}$ 健太さんの家では，冷蔵庫の購入を検討しています。健太さんは，冷蔵庫A，冷蔵庫B，冷蔵庫Cについて調べたことを，次のような表にまとめました。

健太さんが作った表

	冷蔵庫A	冷蔵庫B	冷蔵庫C
容量	400 L	500 L	500 L
本体価格	80000 円	100000 円	150000 円
1 年間あたりの電気代	15000 円	11000 円	6500 円

健太さんは，冷蔵庫A，冷蔵庫B，冷蔵庫Cについて，使用年数に応じた総費用を考えることにしました。そこで，それぞれの冷蔵庫において，1 年間あたりの電気代は常に一定であるとし，次の式で総費用を求めることにしました。

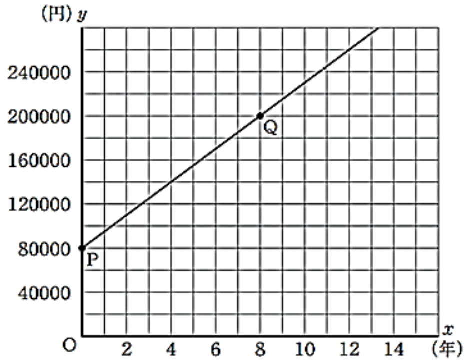
（総費用）＝（本体価格）＋（1 年間あたりの電気代）×（使用年数）

例えば，冷蔵庫Aを購入して 3 年間使用するときの総費用は，80000 ＋ 15000 × 3 ＝ 125000 となり，125000 円です。

次の（1），（2）の各問いに答えなさい。

（1）冷蔵庫Aを購入して x 年間使用するときの総費用を y 円とします。この x と y の関係を，健太さんは次のような一次関数のグラフに表しました。

冷蔵庫Aの使用年数と総費用



このグラフにおける x 座標が 0 である点をＰ，x 座標が 8 である点をＱとします。点Ｐの y 座標と点Ｑの y 座標の差は，冷蔵庫Ａについての何を表していますか。下のアからオまでの中から正しいものを 1 つ選びなさい。

ア　本体価格

イ　使用年数

ウ　1 年間あたりの電気代

エ　購入してから 8 年間の電気代

オ　購入して 8 年間使用するときの総費用

$\boxed{4}$ の問題では，関数を用いて事象を捉え考察する場面において，事象に即して解釈したことを数学的に表現すること，反比例の表から，x と y の関係を式で表すことが求められた。

$\boxed{6}$ の問題では，与えられた情報を読み，数学的に表現したことや数学的な結果を事象に即して解釈すること，問題解決の方法を数学的に説明することが求められた。

結果（正答率）は，以下のようであった。

問題	本校	県	全国
$\boxed{4}$	46.2	48.8	48.9
$\boxed{6}$(1)	42.1	39.0	38.8
$\boxed{6}$(2)	36.6	34.5	34.7

これらの結果は，本校だけではなく，関市の多くの中学校でも同様な結果となっていた。$\boxed{4}$ の問題は全国，県よりも正答率が低く，$\boxed{6}$ の問題については逆に高かった。この結果について，これまでの関数

領域の指導を振り返りつつ，誤答の原因を分析した。

$\boxed{4}$の問題で誤答分析を行った結果，比例の式 $y=ax$ の a の値を $x=1$ のときの y の値 -6 にしてしまい，$y=-6x$ と答える生徒が多く見られた。この結果は，変数 x と y の対応する値の変化のようすを考えないで，ただ $x=1$ のときの y の値を比例の一般式に代入してしまったためと考える。

$\boxed{6(1)}$の問題では，表されている１次関数のグラフの座標軸が何を示しているか，その値を表で与えられた値そのままで解釈してしまったと考える。また，冷蔵庫Ａの１次関数のグラフから読み取った２点の x 座標，y 座標のそれぞれの差，つまり，x と y の増加量が何を示しているのか解釈することができていないと考える。また，冷蔵庫Ａの１次関数のグラフから読み取った２点の x 座標，y 座標のそれぞれの差，つまり，x と y の増加量が何を示しているのか解釈することができていないと考える。

$\boxed{6(2)}$の問題では，座標軸で表されている数が何を示しているか分かっていないため，表にある冷蔵庫Ｂ，冷蔵庫Ｃの数をどのように活用してグラフに表すことができるかが理解できず，問題解決の方法を数学的に説明することができなかったと考える。

これら３つの問題について明確となった生徒のつまずきは，以下のとおりである。

１　表やグラフから対応する値の変化のようすがどのようになっているか捉えること ２　グラフ上の２点について，座標軸が示す数からどのような意味を表しているか読み取ること

これらのつまずきは，２つの原因が考えられる。１つ目は，２つの数量の関係を表，グラフ，式で表し，それらを関連付けて指導することを大切にしてきたが，式に表すことを技能として繰り返し行ってきただけで，それに至るまでの思考を明確にし，表現する授業の手立てが弱かった。２つ目は，グラフの座標軸がどのような数量を表しているのか，x と y の増加量が何を表しているのかを読み取ることができなかったことが原因であると考えた。これは，授業の中で表やグラフから増加量を求めるときに，式に当てはめて求めるという技能的な部分は繰り返し指導したが，求めた増加量が問題の中でどのような意味をもつのかを押さえる手立てが弱かったためである。これらのことが前述したような生徒のつまずきを生み出してしまっているのではないかと考えた。

そこで，私たち関市教育研究会数学部会では，これらのつまずきの要因を解決するため，関市全体としてより一層の関数領域における指導改善が必要であると捉えた。

このような実態をもとに，関市教育研究会数学部会では，授業を行っていく上で大切にしていきたいことを以下の３点とした。

(1)　関数領域における数学的な見方や考え方を明確にして，表，グラフ，式に表現する力を身に付けていく授業計画を行うこと (2)　ともなって変わる２つの数量 x と y の変化のようすを確実に捉え，その意味まで追究する授業展開の工夫をすること (3)　生徒一人一人が自らの学びを振り返ったり定着を実感したりする評価を行うこと

以上を踏まえ，令和２年度より関市教育研究会数学部研究推進委員会を立ち上げ，３年間を見通した関数領域の指導改善をねらい，以下の研究主題と研究内容を設定した。

２　研究主題

表，式，グラフを **相互に関連付けて考察する生徒の育成** **～２つの数量の変化のようすに着目して～**

３　研究仮説

単位時間に必要な数学的な見方や考え方を明確にした授業計画を行い，変数 x と y の変化のようすに着目した授業展開の工夫と，生徒が学びを実感できる評価を行えば，関数領域における資質・能力を高めることができる。

4　研究内容

（1）数学的に考える資質・能力を育成するために必要な数学的な見方や考え方を明確にした単元指導計画の作成
（2）変数 x と y の変化のようすを確実に捉えるための授業展開の工夫
（3）生徒一人一人が自らの学びを定着，実感する評価の在り方

5　研究実践

（1）数学的に考える資質・能力を育成するために必要な数学的な見方や考え方を明確にした単元指導計画の作成

関市中学校数学部会では，2つの数量の変化のようすに着目することが，関数領域の学習で必要な数学的な見方や考え方であると捉え，どのような指導をしていくことが生徒にその見方や考え方の定着を図ることができるのかを考えた。そこで，下の【資料】のように，単元指導計画の1単位時間ごとに「変化のようすを捉えた生徒の姿」という項目を位置付け，生徒がどのような姿になることを目指すのかを明確に示すことが必要であると考えた。

これまでは，教師それぞれの授業展開で学習内容の定着を図ってきたが，今回の単元指導計画の改善で，1単位時間での教師の指導の重点を分かりやすく限定することができたため，生徒も取り組むねらいややるべきことがはっきりし，2つの数量の変化のようすを矢印を使って表すことができるようになった。また，x や y の増加量を正しく捉えることもできるようになり，変化の割合を求めること，グラフをかくこと等が正確にできるようにもなった。

さらに，1年生からこのような単元指導計画のもと授業を展開してきたことにより，2年生，3年生の多くの生徒は，教師が指導する前から表やグラフに矢印をかき込むことが当たり前の姿になっていた。生徒自身，2つの数量の変化のようすを矢印を使って表すことのよさを実感することができていた。

（2）変数 x と y の変化のようすを確実に捉えるための授業展開の工夫

中学校学習指導要領には次のようにある。

> 関数の特徴を見いだす場合に，表，式，グラフが有効であることを理解するとともに，関数として捉えられる二つの数量の変化や対応の特徴を表，式，グラフによって適切に表現できるようにする。

【資料】

1次関数　単元指導計画

時	単位時間	学習活動	評価規準	変化の様子を捉えた生徒の姿
1	1次関数	・2つの変数を表にし，x の値が1ずつ増えるとき，対応する y の値が一定数ずつ増えることを理解する。	ともなって変わる2つの数量に着目し，表や式に表すことで1次関数の定義を理解することができる。また，比例は1次関数の特別な場合であることを理解する。【知識・技能】	・矢印を使って x が1ずつ増加したときの y の増加量を示すことができる。
2	1次関数の値の変化のようす	・1次関数の表をもとに，x の値が1ずつ増加すると，対応する y の値が a ずつ増加することを理解する。	1次関数では，x の値がどこからどれだけ増加しても，変化の割合が一定であり，a の値に等しいことを理解する。【知識・技能】	・x と y の関係を表に表したとき，右向きの矢印を使って増加量を表すことができる。
3	1次関数のグラフ	・表から座標平面上に細かく点をとることで，直線上に点が並ぶことを理解する。	x の増加量と y の増加量に着目し，変化の割合が一定だからグラフが直線になることや $y=ax$ の比例のグラフを b だけ平行移動させたことを説明できる。【知識・技能】	・点を結ぶときに，x の正の方向に矢印をひいてから，y の値の増減を上下の矢印を使ってひくことができる。
4	1次関数のグラフにおける a の値がもつ意味	・いろいろな a の値のグラフをかき，比較することで特徴を捉えることができるようにする。	1次関数のグラフでは，a の値が直線の傾きを表していることや a の値によってグラフの傾きが違うことを理解する。【知識・技能】	・1つのグラフ上で，x の増加量を y の増加量を矢印でかき込み，y の増加量を x の増加量でわると常に一定であることを理解することができる。
5	1次関数のグラフのかき方	・1次関数の特徴から2点をとればよいことに気付くことができる。	1次関数の特徴を捉え，分かっている2点をとり，直線で結ぶことでグラフをかくことができる。【知識・技能】	・座標平面上で，切片から x の正の方向に増加量を矢印を使って表し，その後に y の増加量を矢印を使って表すともう1点を見付けることができ，グラフをかくことができる。
6	1次関数の式の求め方	・グラフから傾きや切片を読み取ることができる。	条件からグラフから式，2点から式を求めることができる。【知識・技能】	・グラフから変化の割合を読み取るときに，点を追う矢印の向きが x の正の方向に表すことができる。 ・2点から変化の割合を表にして求めるときには，x の正の方向への矢印で x や y の増加量を表すことができる。
7	たしかめよう（練習問題）			
8	2元1次方程式のグラフ	・2元1次方程式の解を座標平面上に表すと，直線のグラフになることを理解する。	2元1次方程式のグラフは，直線であり，y について解いたときの1次関数のグラフと一致することを理解する。【知識・技能】	・2元1次方程式の解をグラフから見付けるとき，x の増加量と y の増加量を矢印を使って表すことで，複数の解を見付けることができる。

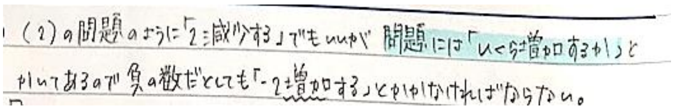
上記にあるように，関数領域の学習では，2 つの数量の変化や対応の特徴を確実に捉えることが重要である。そのため，x と y の変化のようすを確実に捉えることができるよう，「増加の見方」を大切にした指導を 3 学年に渡り実践した。ここでいう「増加の見方」とは，「表やグラフを見て考える際には，必ず x の正の方向に沿って対応する y の変化のようすを調べる」というものである。この「増加の見方」は授業内で生徒と共に定義し，生徒がイメージしやすいように，表やグラフには必ず矢印をかくように指導した。以下では，この「増加の見方」の指導の要点を大きく 4 つに分けて述べる。

（ア）「増加の見方」を意識した表現

1 年生「量の変化と比例，反比例」 【第 4 時】比例と比例定数

変数 x，y の値の変化のようすを表すときに，「x の値が 1 増加したときに対応する y の値が 2 減少する。」と表現するのではなく，増加量が負の数になることもあると考えられるようにするため，「−2 増加する」と表現するように指導した。

この表現の仕方は，1 年生「数の世界のひろがり」の単元で学習した「負の符号−を使って表す方法」が確実に定着できるように継続的に指導してことにより，生徒のなかにスムーズに定着することができた。



【写真①】学習のまとめ

この本時の学習のまとめには，【写真①】のように，「増加」について問う問題については，例え y の値が減少していたとしても，負の数を使って「〜増加する」と答えないといけないという記述が見られた。このことから，この生徒の中に関数における「増加の見方」が強く意識付けられたことが分かる。

また，1 次関数の変化のようすを一般化するときの，以下の表現にも自然につなげることができた。

1 次関数 $y=ax+b$ では，x の値が 1 ずつ増加すると，対応する **y の値は a ずつ増加する**。

（イ）x の正の方向を表す矢印からかく

関数を正確に捉えるには x の値の変化に対応して y の値がどのように変化するのかを考える必要がある。そのため，表やグラフにも矢印をかいて増加量を捉えられるように指導を行った。

さらに，関市中学校数学部会では，「増加の見方」を大切にするため，x の値が負の数の範囲でも正の方向の矢印をかくように指導を行った。

よって，生徒の意識の中でも x の変化のようすから着目できるように，表やグラフに矢印を書き込む際は，必ず x の正の方向を表す矢印から引く指導を行った。

1 年生「量の変化と比例，反比例」 【第 7 時】比例のグラフ②

生徒は前時までに，数の範囲を負の数まで広げた場合の比例の意味や定義，比例のグラフのかき方を学習してきた。本時では，$y=2x$ と $y=-2x$ を扱い，比例定数が正の数の場合と負の数の場合では，表やグラフにどのような特徴が表れるのか調べる学習を行った。「x の値が増加すると，対応する y の値は増加するか，減少するか。」という問いに対しては，「$y=2x$ では，x の値が増加すると，対応する y の値は増加し，$y=-2x$ では，x の値が増加すると，対応する y の値は減少する。」と多くの生徒がすぐに答えた。それは，x と y の値の変化のようすを正しく読み取ることができたからと捉える。これは，「x の値が増加する」ということを，表を左から右に向かって見るということだと理解し，それに対応して y の値がどのように変化しているかを読み取ることができたためだと考えられる。

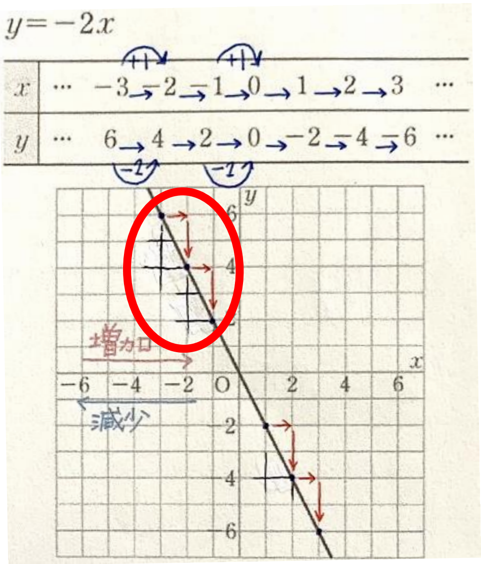
しかし生徒は，x の値とそれに対応する y の値の変化のようすをグラフに表すための水平方向の矢印と鉛直方向の矢印のかき方を知らないため，まずは $y=2x$ のグラフにおいて矢印での増減の表し方を全員で確認した。次に，$y=-2x$ のグラフについて個人で追究する時間を設けた。

生徒 A は初め，点(−3，6)から点(−2，4)の変化を考える際，まず下に 2 マス分の矢印をかき，次に右に 1 マス分の矢印をかいていた。生徒 A と同じような矢印のかき方をしている生徒は他にも何人かいた。その要因として，右下がりの直線のイメージから，まず下向きの矢印をかいてしまうのでなない

かと考えた。そこで，全体交流の際，次のような発問をした。

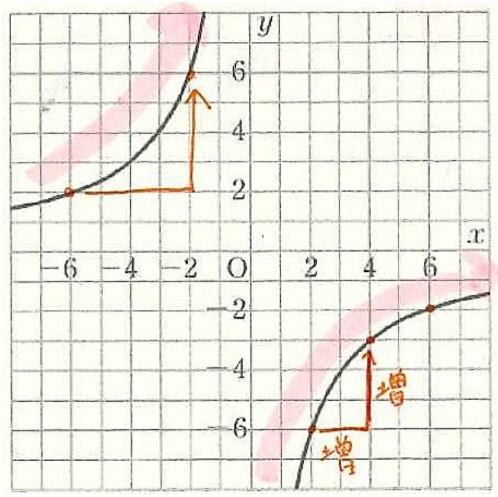
> T　:「この問いは，『x の値が増加すると…』と書かれているけど，最初にどちらに矢印をかくといいのかな。」
> S1 :「『x の値が増加すると…』ということは，x の値から先に考えているということだから，矢印はまず右に 1 マス分かかないといけないと思います。」
> S2 :「最初に下にかいて次に右にかくと，『y の値が 2 減少すると，x の値が 1 増加する』という意味になってしまうから，この問題とは違う意味になってしまうと思います。」

この発問と他の生徒の発言により，生徒 A は自身の間違いに気付き，【写真②】のように題意に合うような矢印のかき方に修正した。仲間同士での学び合いを通して，生徒の思考が変わった。



【写真②】生徒 A の思考の変容のようす

同単元の反比例のグラフの学習の際にも，対称性から片方のグラフの内側に矢印をかいたら，もう一方のグラフにも内側に矢印をかいてしまう生徒がいるのではないかと考えていた。しかし，まず x の正の方向から矢印をかくことが定着していたため，多くの生徒が【写真③】のように一方はグラフの内側に，もう一方はグラフの外側に正しく矢印をかき，x の値の変化に対応して変化する y の値を考えることができていた。



【写真③】反比例のグラフにかいた矢印

（ウ）部分的な表を書き変化の割合を求める

座標のわかっている 2 点を通る直線の式を求める問題で，大日本図書「数学の世界 2」では，次の 2 通りの解法がある。

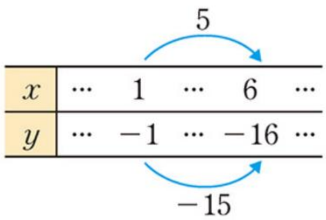
> ①2 点の座標から傾きを求め，$y=ax+b$ に代入してから切片を求める。
> ②2 点の座標を $y=ax+b$ に代入して連立方程式を解き a と b を求める。

①の方法では以下のように減法を使って x と y の増加量を求めてから傾きを求めている。

直線が通る 2 点の座標から，直線の傾きは $\dfrac{7-(-2)}{4-1}=3$

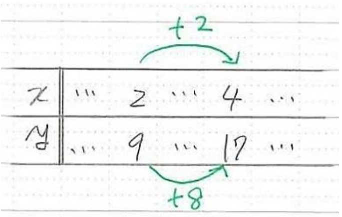
求める式を $y=3x+b$ とすると，この直線は点 (1，−2) を通るから，…

この方法では，減法の際に符号の間違いが生じたり，傾きが負の数のときに対応する x と y が入れ替わったりしてしまうことがあった。このような間違いも，今まで身に付けてきた「増加の見方」を用いることで改善していけると考えた。具体的な方途として，【写真④】のように，部分的な表を書き，x の正の方向の矢印をかくことで「増加の見方」を意識しながら x と y の増加量を求めるという方法で指導した。



【写真④】
部分的な表から増加量を求めている例

この方法を指導したことにより，写真⑤のように増加量を求め，変化の割合を正しく求めることができる生徒が増えた。この考え方は，基礎的な１次関数の式を求める問題だけにとどまらず，利用のなかでも活かすことができていた。



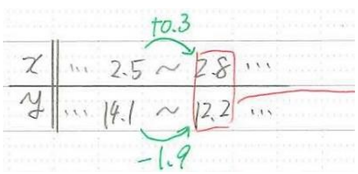
【写真⑤】
部分的な表から増加量を求めている生徒のようす

２年生「１次関数」
【第 14 時】富士山八合目の気温を予想してみよう

本時では，頂上，七合目，六合目，五合目の標高と気温のデータをもとに八合目の気温を推測する活動を行う。標高を x km，気温を y ℃として，座標平面上に点を打っていく中で，１次関数を見出して問題を解決していく。この４つのデータを表に表してみても次のようになり，関数的な規則を見つけにくい数の並びになっている。

x(km)	2.4	2.5	2.8	3.8
y(℃)	14.8	14.1	12.2	6.3

この中から２つの点を直線が通るとしてその直線の式を求めていく活動では多くの生徒につまずきがあると考えていたのだが，部分的な表の指導が定着していたため，多くの生徒が【写真⑥】のように部分的な表に矢印をかいて正確に増加量を求め，傾きを求めることできていた。



【写真⑥】
部分的な表から およその増加量を求めている例

（エ）応用問題のなかでも活きる「増加の見方」

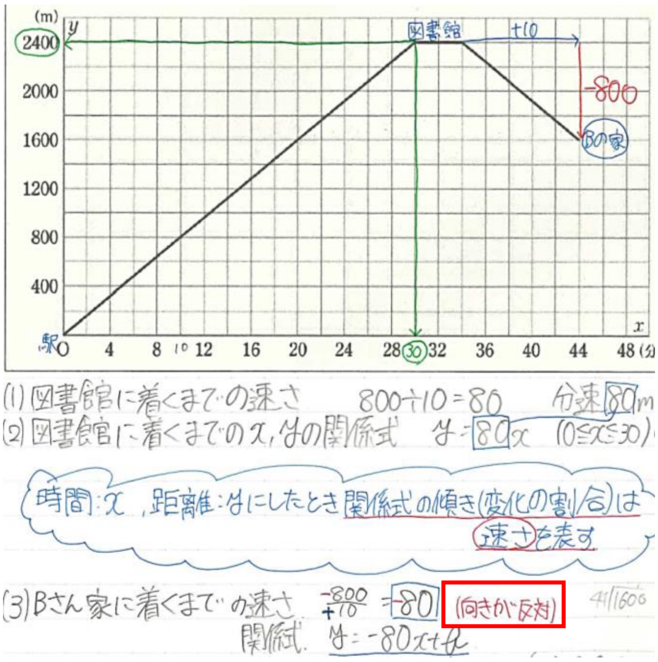
（ア）～（ウ）までの指導を経て，生徒が問題に取り組む姿から，増加・減少を見極め，正確に変化の割合を求めることができるようになってきたと捉えた。

そして，身の回りの問題を解決する応用問題のなかで，今まで培ってきた「増加の見方」を活かすことができた。

２年生「１次関数」
【第 16 時】グラフをもとに問題を解決しよう

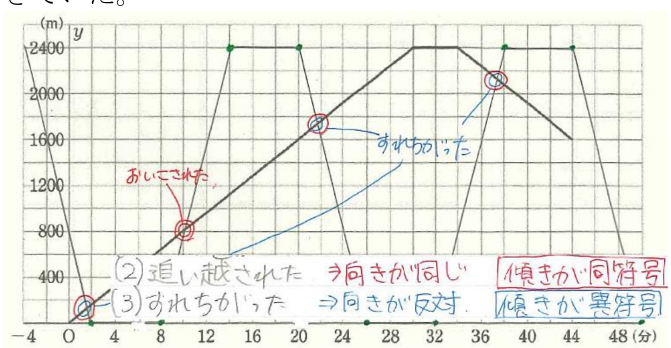
本時では，駅から図書館を経由してＢさんの家に向かって進むＡさんと図書館と駅の間を往復するシャトルバスの進行のようすをグラフに表し，その交点がもつ意味を考える学習をする。

そのために【写真⑦】のように，まずＡさんの進む速さと x と y の関係の式を求めることを通して，駅から図書館へ向かうときの変化の割合が正で，図書館からＢさんの家（駅の方向）へ向かうときの変化の割合が負であるということを丁寧に確認した。



【写真⑦】変化の割合から進行方向を考えているようす

この活動で符号によって進行方向が逆になることを理解できたため，グラフの傾き（変化の割合）から進行方向を判断し，その交点において，すれちがっているのか追い越しているのかを考えることができていた。

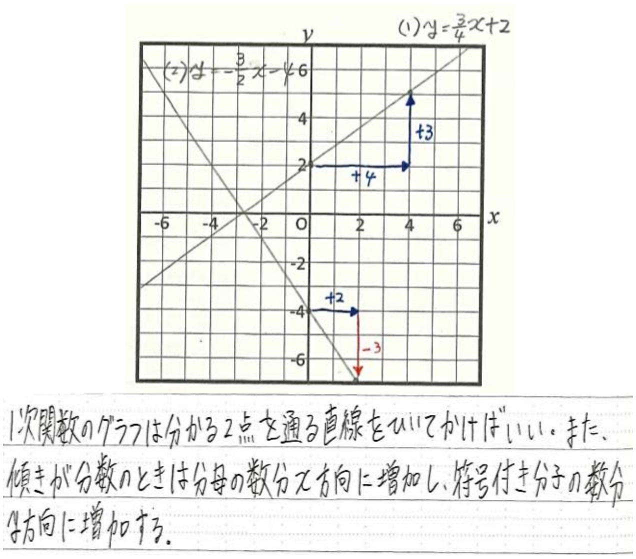


【写真⑧】交点において追い越したのか，すれちがっているのか判断しているようす

【写真⑧】のように２つのグラフの傾き（変化の割合）が同符号だったら追い越す，異符号だったらすれちがうと判断し，問題を解決することができた。

（3）生徒一人一人が自らの学びを定着，実感する評価の在り方

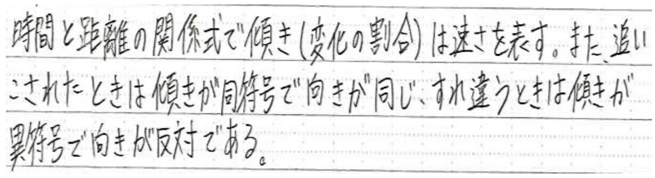
関市では，学習内容の定着とその理解の確認のため，１単位時間ごとノートの最後に“まとめ”を書くようにしている。“まとめ”とは，「本時の学習内容で新しく学んだ大切な見方や考え方」と，生徒とともに定義している。そして，単元末にノートを回収して生徒が書いた“まとめ”を確認し，単位時間ごとに学びを実感しているかを把握するようにしている。それを評価の材料としている。



【写真⑨】学習のまとめ

２年生「１次関数」の第６時は，切片 b から傾き a を利用して１次関数のグラフをかく授業である。

上記の生徒Ａは，傾き a が分数であってもその値が変化の割合と同値であることを理解していて，分母の数が x の増加量，分子の数が y の増加量であることを捉えることができていた。そして，グラフに表す際，初めに x 方向に分母数分増加し，次にそこから y 方向に分子数分増加すれば，関係式を満たす切片以外のもう１点を見付けることができることを表現することができている。（2）の傾き a は負の数だが，x 方向は必ず正の向きで考えることも文章化できていると捉える。そして，y の増加量が負の数でも「増加」という言葉を用いていることも，本時の学習内容を理解していることを表していると捉える。



【写真⑩】学習のまとめ

２年生「１次関数」の第 16 時は，日常の事象から１次関数の関係を式やグラフで表し，そこから課題解決をしていく授業である。

上記の生徒Ａは，グラフから１次関数の関係式を導き出し，変化の割合が（距離）÷（時間）になっていることから傾き a は「速さ」を表していることを理解した。そして，２つのグラフの交点を見付け，同符号の傾きの交点，異符号の傾きの交点になっていることに気付き，その意味である「追い越す」と「すれちがう」という違いを表現することができている。傾き a の符号の違いを進行方向が逆になると理解していることを表していると捉える。

これらのように，１単位時間ごとに生徒が“まとめ”を書くことで，本時の学習内容が定着したのか，学びを実感していたかを確認することができた。また，ノートを返却する際，とてもよかった“まとめ”を紹介し，どのように数学を学習していけばよいか，学びを実感していけばよいかを全体でも確認し合うことができた。このことが，理解することの喜びにもつながった。

６　まとめ

○表やグラフに矢印をかいたことで「増加の見方」が身に付き，y の増加量が値として減少していても負の数の増加と捉えることができる生徒が増えた。

○部分的な表を用いることで，x と y の増加量を正確に捉えることができ，変化の割合を正しく求めることができる生徒が増えた。

○身の回りにある事象から，今まで培ってきた「増加の見方」を活かし，変化の割合のもつ意味（速さと向き）を理解することで問題を解決することができた。

●「対応の見方」からも，数量の変化やグラフや式とのつながりを意識させた授業や発問を工夫していきたい。

本日の会の感想を、下の QR より回答してください。

https://forms.gle/Ni23j7jasvvedoGg7