

東海地方数学教育研究会第56回研究大会

教育課程 中高関連

関数領域における中高関連を 大切にした学習指導の工夫

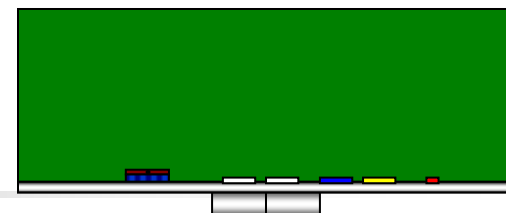
～3年生「関数 $y=ax^2$ 」における授業実践から～

岐阜県土岐市立土岐津中学校


富倉 亮



はじめに

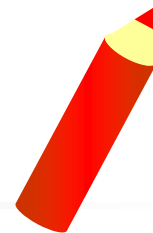


高校の数学，難しいよ。授業のスピードも速いし，関数のグラフもぐにやぐにやだし...だけど，中学校で学んだように考えれば，分かるよ。ただ面倒なだけだね。中学校で学んだ考え方って高校でも通用するね。



中学校数学と同じような見方や考え方を利用すれば，高校数学に触れ，体験し，その学び方にもかかわるのではないか。

主題設定の理由



式で関数を定義し、表を仲介して、たくさんのグラフをイメージ
表や式やグラフを相互に関連付けて、
その特徴を調べることで、関数の概念を理解

1年生
比例と反比例

2年生
1次関数

3年生
関数 $y=ax^2$

関数の
学び方

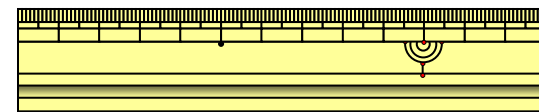
新しく出会う関数

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ 指
数関数 $y=a^x$ 対
数関数 $y=\log_a x$ など

生徒たちが新しく出会う関数の概念や関数理論の拡張に重要になってくる。



研究主題



関数領域における中高関連を
大切にした学習指導の工夫
～3年生「関数 $y=ax^2$ 」における授業実践から～

1. 関数領域における中高関連を大切にした指導計画の作成
2. 中高関連を大切にした関数 $y=ax^2$ の学習指導のあり方

研究内容1にかかわって

【研究内容1】関数領域における中高関連を大切にした指導計画

(中学校：大日本図書 高校：教研出版)

<別紙1>

中学1年 4章 比例と反比例

比例と反比例の利用
反比例とグラフ (2)
反比例とグラフ (1)
反比例と式
反比例
比例の式とグラフ
比例のグラフ (2)
比例 (1)
変数と変域
2つの数量の調べ方

中学2年 3章 1次関数

1次関数と図形
1次関数のグラフ (2)
2元1次方程式のグラフ
1次関数の式の求め方
1次関数グラフの書き方
1次関数のグラフ (2)
1次関数のグラフ (1)
1次関数の値の変化の割合
1次関数の値の変化の割合
1次関数

中学3年 4章 関数 $y=ax^2$

ゴールの運動とグラフ
関数のグラフ
図形のなかに関数
関数 $y=ax^2$ の変化の割合
$y=ax^2$ のグラフと値の変化
関数 $y=ax^2$
関数 $y=ax^2$
関数 $y=ax^2$
関数 $y=ax^2$
関数 $y=ax^2$
関数 $y=ax^2$

高校1年 2章 2次関数

2次不等式
2次関数のグラフとx軸の位置関係
2次関数のグラフとx軸の位置関係
2次関数の最大と最小
2次関数の最大と最小
関数とグラフ

関数領域における
各単元(縦)の系統性

研究内容1にかかわって

The background consists of various educational snippets:

- 比例の式とグラフ**
比例のグラフの特徴を利用したグラフのかき方や、グラフから比例の式を求める方法を理解する。
- 2元1次方程式のグラフ**
2元1次方程式のグラフの意味を理解し、また、1次関数のグラフとの関係を理解する。
- 1次関数の式の求め方**
グラフの傾きや切片などから目当ての直線の式を求め、また、2点を通る直線の式を求める。
- 関数の最大・最小**
関数の最大と最小を調べる。また、1次関数 $y = ax + b$ の場合と比較してまとめる。
- 関数の最大・最小**
関数の最大と最小を考えることは、その関数の定義域を明確にして、そのときの関数の値の変化を調べて値域を求めることであることと理解させる。
- 座標**
変域に負の数がふくまぬ座標平面や点と座標の関係、点の位置を座標を使って調べる。
- 比例と式**
比例定数が負の数の場合のグラフのかき方を調べる。
- 関数 $y = ax^2$ のグラフ (2)**
関数 $y = ax^2$ のグラフは、 a の符号によって異なる。また、 a の値によってグラフの開口の大きさが異なる。
- 関数 $y = ax^2$ のグラフ (1)**
関数 $y = ax^2$ のグラフのかき方を調べる。
- 関数 $y = x^2$ のグラフ**
関数 $y = x^2$ のグラフをかき、その特徴を理解する。
- 二次関数のグラフ**
二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を平方完成して $y = a(x-p)^2 + q$ の形にし、そのグラフをかき、 $y = ax^2$ のグラフの平行移動を考察することにより、一般の関数 $y = f(x)$ のグラフの平行移動についても理解させる。

Overlaid on this collage is large, stylized text:

- 関数領域における** (top)
- 各学年(横)の系統性** (bottom)

研究内容2にかかわって 「関数 $y=ax^2$ のグラフ(2)」の実践について

8 $y=2x^2+4$ のグラフ

$y=2x^2$ …… ① $y=2x^2+4$ …… ②

式

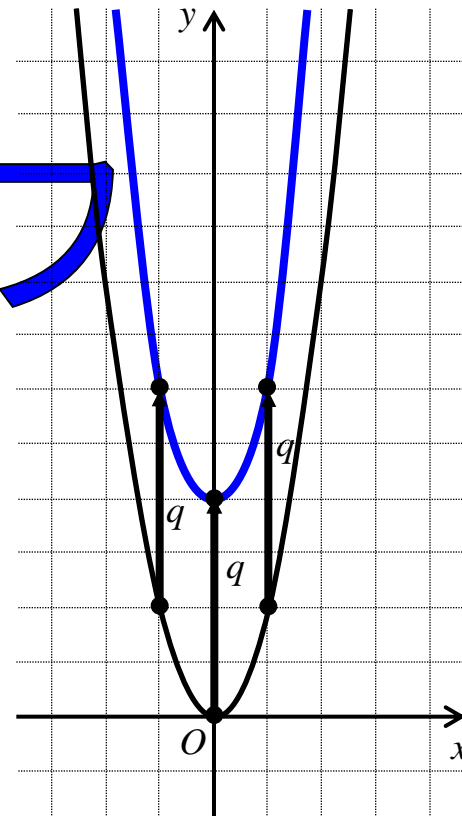
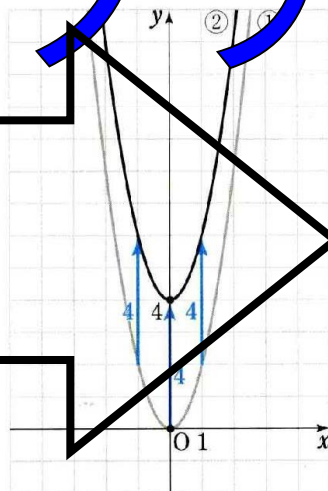
$y=ax^2$ に $y=ax^2+q$ を作

x	…… -2	-1	0	1	2	3	……	t	……
① $2x^2$	…… 8	2	0	2	8	18	……	$2t^2$	……
② $2x^2+4$	…… 12	6	4	6	12	22	……	$2t^2+4$	……

この表から、 $x=t$ に対応する②の y の値は、 $x=t$ に対応する①の y の値より常に4だけ大きいことがわかる。したがって、②のグラフは、①のグラフを y 軸方向に4だけ平行移動した放物線で、右の図のようになる。

また、②の放物線の軸は y 軸、頂点は点 $(0, 4)$ である。 [終]

表 グラフ



研究内容2にかかわって 「関数 $y=ax^2$ のグラフ(2)」の実践について

C $y=a(x-p)^2$ のグラフ

例 9 $y=2(x-3)^2$ のグラフ

$$y=2x^2 \quad \dots \textcircled{1} \quad y=2(x-3)^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

式

$y=ax^2$ の値に対する。

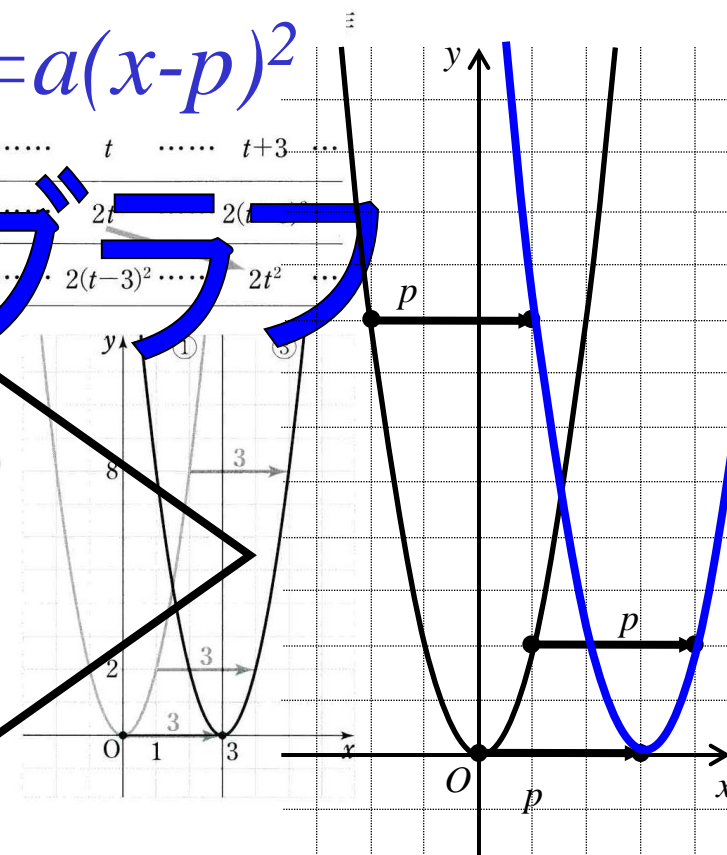
$y=a(x-p)^2$

x	$\dots=1$	0	1	2	3	4	\dots	t	\dots	$t+3$	\dots
$2x^2$	2	0	2	8	18	32	\dots	$2t^2$	\dots	$2(t+3)^2$	\dots
$2(x-3)^2$	32	18	8	2	0	2	\dots	$2(t-3)^2$	\dots	$2t^2$	\dots

この表から、 $x=t$ に対応する①の
 y の値と、 $x=t+3$ に対応する③
の y の値は一致することがわかる。
したがって、③のグラフは、①の
グラフを x 軸方向に3だけ平行移
動した放物線である。

また、③の放物線の軸は、点 $(3, 0)$
を通り y 軸に平行な直線、頂点は
点 $(3, 0)$ である。

終



研究内容2にかかわって 「関数 $y=ax^2$ のグラフ(2)」の実践について

D $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

例 10 $y=2(x-3)^2+4$ のグラフ

$$y=2(x-3)^2+4 \quad \dots \textcircled{4}$$

式 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフを y 軸方向に 4 だけ平行

移動し $y=ax^2$ なる。

よって、 $\textcircled{4}$ のグラフは、

$$y=2x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

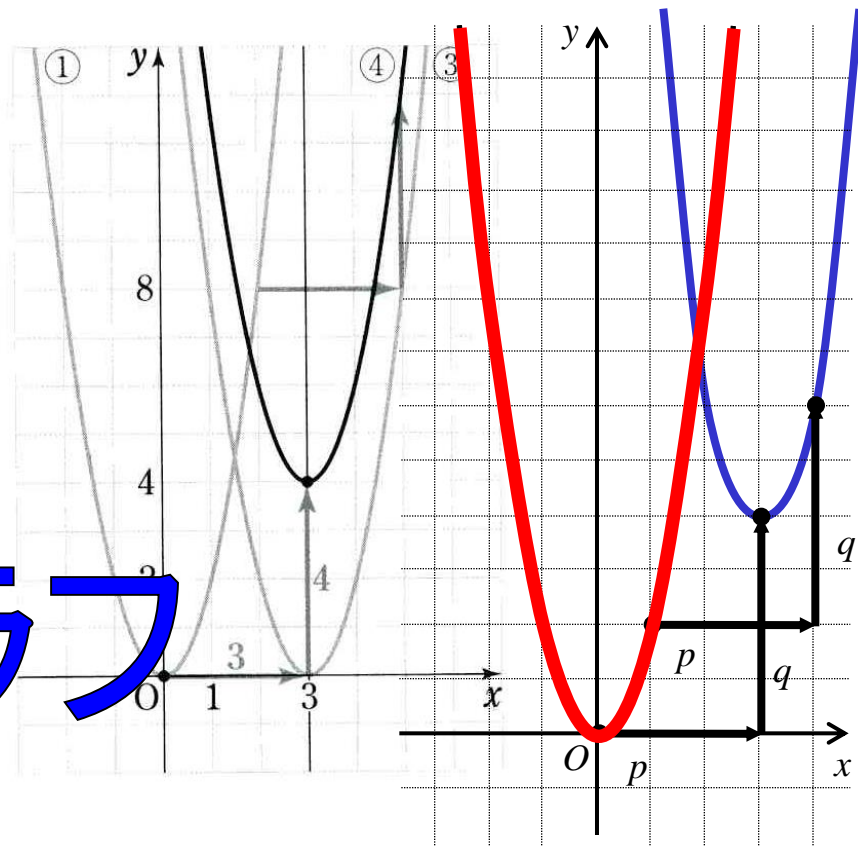
のグラフを x 軸方向に、 y 軸方

向に 4 だけ平行移動した放物線で、

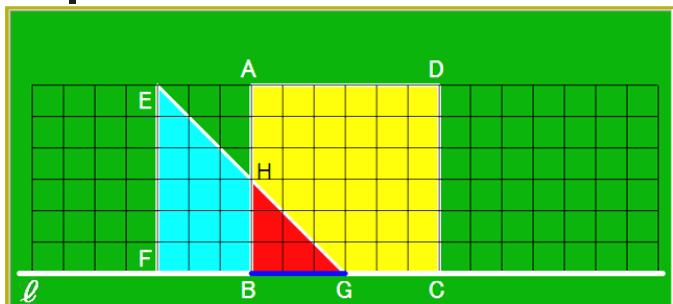
軸は直線 $x=3$ 、頂点は点 $(3, 4)$

である。

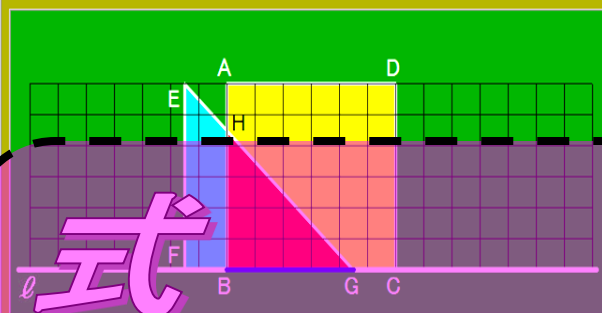
終



研究内容2にかかわって 「図形のなかに現れる関数」の実践について



関数の利用 初期画面 点BとGとの距離 x 4.5 cm



2次関数

式

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

グラフ

表

2次関数の
概念の導入

研究の実践

「関数 $y=ax^2$ のグラフ(2)」の実践

- 原点を通る。
- y軸について対称
- 放物線
- $a > 0$ のときは上に開き, $a < 0$ のときは下に開く。

関数 $y=ax^2$ のグラフ
の特徴の根拠

2次関数

$$y=ax^2+bx+c$$

関数 $y=ax^2$ のグラフ

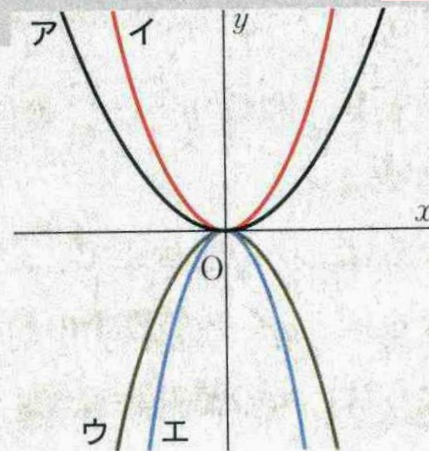
右のア～エの放物線は下の(1)～(4)のグラフをかいたものです。ア～エはそれぞれどのグラフでしょうか。

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$

(2) $y = -x^2$

(3) $y = x^2$

(4) $y = -2x^2$



研究の実践(考察)

「関数 $y=ax^2$ のグラフ(2)」の実践



いろいろなグラフを見てみて、全然違うように見えたグラフでも、よく見てみると、共通点があった。そういうグラフの特徴を理解すると、グラフをかくときや、問題を考えるときに便利だと思った。

放物線は、原点は必ず通るものだと思っていたけれど、2次関数のグラフは原点を通るとは限らないことが分かった。でも式 $y=ax^2+bx+c$ を見れば、その理由も分かった。



関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を明確にすることで、2次関数のグラフの特徴も理解することができた。

グラフを作ることに夢中になり、その根拠を追究しきれない生徒がいたため、この学習ソフトウェアは生徒の個人追究の援助であることを理解させ、これからの指導にあたりたい。

研究の実践

「図形のなかに現れる関数」の実践

関数の利用

初期画面

点BとGとの距離 x 10.5 cm

グラフ y

重なってできる 図形の面積(赤)
 重なっていない 図形の面積(青)
 重なっていない 図形の面積(黄)

$$y = \frac{6^2}{2} - \frac{(x-6)^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 6x$$

今まで学んできた式ではない。

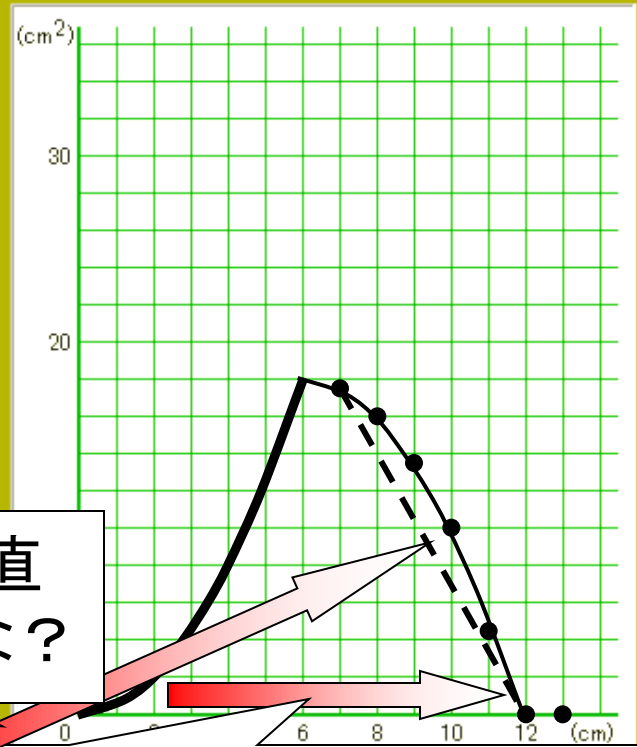
表の点をグラフに表したら、直線にはならない。→曲線かな？

自動

ストップ

表示速度 20

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	0	0.5	2	4.5	8	12.5	18	17.5	16	13.5	10	5.5	0	0



上下逆さまにするとぴったり重なる。

研究の実践(考察)

「図形のなかに現れる関数」の実践

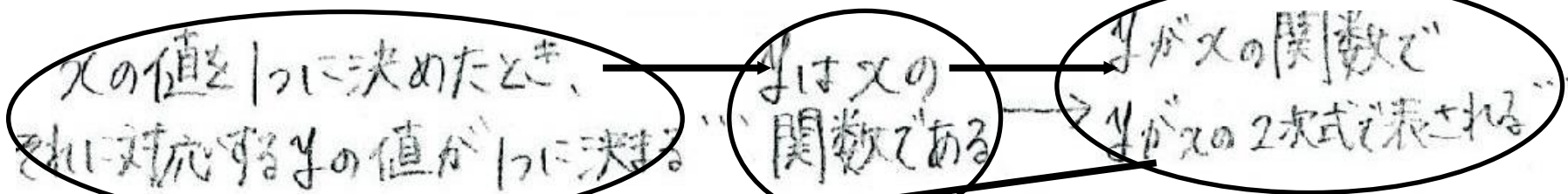
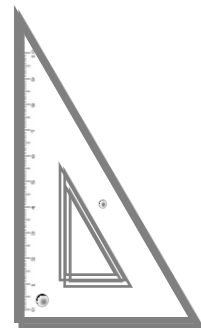


直角二等辺三角形が正方形から出ていくときの重なった部分の面積の変化の様子もわかり、式の意味も理解できた。

$x > 6$ の場合にも $x=7$, $x=8$, ...とそれぞれの場合の表を作って、グラフに点をプロットしたり、図から立式したりと、2次関数について、追究することができた。

高校で数学の授業において、生徒が自らその代表となる図形をかいて考察したり、シミュレーションを頭の中で行い、問題をしたりできるように、類題などで本時の学習を活用する場面を用意する。

研究のまとめ



?
が
 $y = ax^2$ の関数は、1次関数や比例、反比例とちがう特徴がこんなにたくさんある。このちがいをちゃんと理解することが、グラフをかいたり、問題を解くうえで「便利になるはず」!だから、 $y = ax^2$ のグラフを理解することが、 $y = ax^2$ を攻略するkey!!



今後の課題

- 中学校の指導計画に発展的な学習として、高校で学ぶ関数の学習を位置付けていきたい。
- 根拠のある考えで論理を組み立てる学習の活用場面を用意して、高校で学ぶ数学とのかかわりに触れていきたい。
- 学習ソフトウェアなどの特性を吟味し、生徒の実態に応じて、「教師が授業で活用する場面」「生徒が追究で活用する場面」「生徒が見るときの視点」について研究を進めていく。



ご清聴ありがとうございました。