変化の割合の学び直しに着目した関数指導の試み

～ 比例，反比例のグラフの特徴を変化の割合の考え方から考察する実践 ～

岐阜大学教育学部附属中学校　安井　慶一

１．はじめに

第３学年「関数 $y=ax^2$」の学習を終え，生徒が作成した単元まとめやテスト結果をみたときに，一つの疑問が浮かんだ。それは，「変化の割合」についての学習場面において，

① 関数 $y=ax^2$ では，x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量が一定ではないこと
② 関数 $y=ax^2$ では，１次関数の場合とちがって，変化の割合が一定ではないこと
③ 関数 $y=ax^2$ のある区間における変化の割合を求めること

①～②についての「理解」や③についての「技能」の習得は概ね達成できているものの，この関数の変化の仕方を「変化の割合」を用いて調べるという「見方・考え方」については，まだまだ未熟で，実際にそれを積極的に活用しようとする姿は多くないのではないかという疑問である。

そこで，「変化の割合」についての指導を改めて見直し，指導改善を試みることにした。

２．主題設定の理由

中学校学習指導要領解説には，第２学年の学習内容で「関数の変化の仕方をさらに簡潔にとらえるために，対応する変数のとる値の変化の割合について学習する」と示され，第３学年の学習内容では「関数の値の変化の割合については，単に計算の仕方を覚えてその数値を求められるようになることを目標としているのではなく，（中略）変化の割合の関数の考察における役割や，グラフでの見方を知ることを目指している。」と示されている。このことからも **１．はじめに** で挙げた「見方・考え方」を育成していくことの必要性が明らかになってきた。

また，生徒の「変化の割合」についての定着度がどの程度のものかを調べるために，高等学校の数学の先生に高校生の実態について聞き取り調査を実施した。すると，「高校２年で平均変化率を学習するが中学校での既習事項（変化の割合）とつないで考えられる生徒はほとんどいない。」という回答が返ってきた。中学校で繰り返し学習して，十分に定着してきたはずの「変化の割合」が高等学校での学習に生かされていない実態を受けて，その原因を明らかにするとともに，その指導改善を試みようと考えた。

そこで，まずはこうした「変化の割合」に関する生徒の実態を次のように分析することから始めた。

（１）グラフの特徴と変化の割合を関連付けて考える経験が十分でないため関数を局所的にみて増減の様子を調べようとする意識が弱い（変化の割合を求める区間についての意識も弱い）
（２）関数の変化の仕方を調べる場面での変化の割合の役割が明確ではなく，変化の割合についての今後の学習の見通しがもてていない

これらのことは，「変化の割合」を用いて関数の変化の仕方を調べる考え方を第１学年から段階的に位置づけ，効果的に「学び直し」ていくことで改善できるのではないかと考え，本研究の主題を次のように設定した。

変化の割合の学び直しに着目した関数指導の試み
～比例，反比例グラフの特徴を変化の割合の考え方から考察する実践～

２．１　目指す生徒の姿

先述のように，変化の割合の考え方を第１学年から段階的に位置づけ，効果的に「学び直し」を繰り返すことで，変化の割合の役割を明確にし，３年間で，中学校数学における関数の学びを高等学校数学以降の関数の学びへとつなげていきたいと考えた。第３学年「関数 $y=ax^2$」のグラフの特徴を明らかにしていく過程で，その特徴を生徒自身が変化の割合と関連づけて考えられるようにする姿を思い浮かべたときに，まず中学校数学における「関数」のスタート地点にあたる第１学年で，次のような生徒の姿を目指すことにした。

比例や反比例のグラフの特徴を明らかにしていく過程において，それぞれの特徴があらわれる根拠を式で明らかにするとともに，変化の割合を用いて考察していこうとする生徒

２．２　研究仮説

以上のことから，次のような研究仮説を立てて，実践を進めることにした。

> 「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」を限定的に変化の割合として扱うことから始め，それを用いてグラフの特徴を考察する学習を第１学年より段階的に位置づけ，変化の割合の考え方とグラフの特徴を関連付ける学習活動を繰り返すことで，グラフの特徴を変化の割合を使って簡潔にとらえようとする生徒を育成することにつながるのではないか。

３．研究内容および実践

反比例のグラフの学習後に変化の割合を使って反比例のグラフの特徴について考える１時間を位置づけ，次のような研究を実践した。

【研究内容１】

変化の割合に関する学び直しの段階の分析

～変化の割合の考え方を継続的に取り入れた関数指導の試みのために～

変化の割合についての学習の発展性の範囲を高等学校以降にまで広げたとき，その重要性がより明らかになってくる。高等学校数学以降，いろいろな関数と出会う度に，その関数の変化の仕方やグラフの特徴を調べる場面が訪れる。そのたびに平均変化率や微分係数を使って，関数を局所的に調べる必要性が出てくる。そういった意味からも中学校数学における変化の割合の学習の系統性を見直すことで，グラフの特徴を変化の割合の考え方から考察する生徒を育てるヒントが得られるのではないかと考えた。

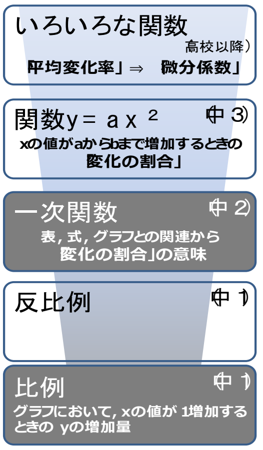


図１　変化の割合に関する発展性の見通し

まず，高等学校数学以降では変化の割合は平均変化率として，その後の微分係数に発展していく。その役割は先述の通りである。そこで，その基礎となる中学校数学では，どのように扱われているかを図１に簡単に示した。

ここにも示されているように，現行の指導要領では第２学年で変化の割合の定義をすることになっている。その上で，表，式，グラフにおける変化の割合の意味を考える時間も位置づけられるようになる。このことで，以前よりも一次関数のグラフの特徴と変化の割合を関連づけて考える姿が生徒の中にみられるようになってきたと感じている。（変化の割合という数値が，式における x の係数と一致するだけでなく，表やグラフではどこにあらわれるのか捉えられるようになった。）また，生徒は第１学年「比例」のグラフの特徴を調べる活動において，すでに x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量を調べた経験がある。これらのことから一次関数のグラフが直線になることを学習した上で，比例は一次関数の特別な場合であるという学習と関連づけることで比例のグラフが直線になる根拠を学び直す。

変化の割合が一定である一次関数の学習の後に，比例を関連づけて考えることに良さもあるが，同時に「変化の割合は一定である」という限定的な記憶が，関数における一般的な性質のように色濃く脳裏に焼き付けることにつながると捉え，その比較対象として，この段階で，反比例を取り上げ，いくつかの区間における変化の割合を求めることにした。変化の割合が一定ではない関数の存在に気付かせるためである。しかし，その後のテストや３年生「関数」の学習段階の授業の様子から，このような扱いだけでは，変化の割合が一定でない関数の存在についての理解度は十分ではないことが明らかになってきた。その原因は，この段階での変化の割合の取り扱いが「一定ではない」ということに留まっていることにあり，それ以上の追究活動が生み出せなかったことにあると捉えている。しかし，実際には１次関数の学習段階で，反比例についてこれ以上踏み込むことに難しさがある。そこで，第１学年の反比例の指導改善をすることに着目した。

現行の指導要領では，小学校においても「比例，反比例」について，その変化の仕方を学習することになっている。中学校数学で扱う数を負の数を含む範囲にまで拡張したことにより，これら２つの関数について，負の数の範囲（座標平面でいうと第２～４象限）でも考える必要が出てきたが，考える内容としては大きな変化はない。そこで，その分，変化の割合の考え方に触れることにより，今後の学習への系統性を次のように改善できない

かと考えた。ここでいう「変化の割合の考え方」とは,「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」を限定的に変化の割合として扱うものである。

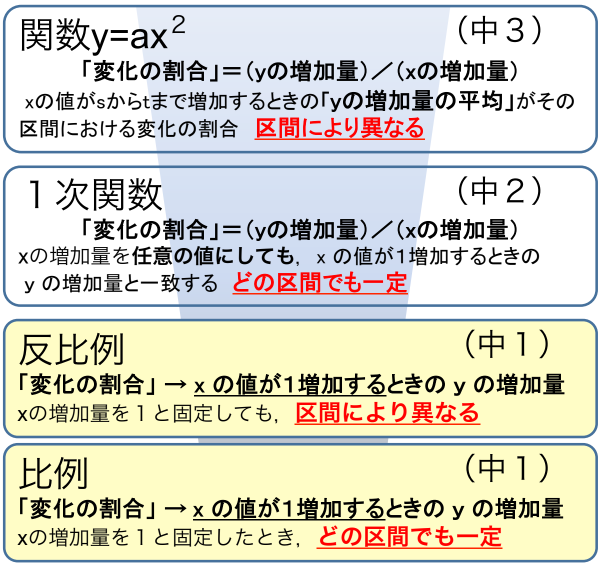


図１'　変化の割合に関する発展性の見通し

グラフが直線でない「反比例」でこそ，変化の割合を用いて変化の仕方を調べるよさに触れられると考え，この段階で「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」に着目して，変化の仕方を追究する活動を位置付ける実践を試みた。

【研究内容２】

変化の割合を用いてグラフの特徴を説明する学習活動の設定

反比例の表から x，y の値の組を座標とする点を座標平面上にプロットし，そのグラフの特徴について調べていく学習活動の中で，

・　反比例のグラフは曲線というけど，どんなふうに曲がっているの？
・　グラフはずっと座標軸に近づき続けるの？

など，いくつかの生徒の疑問が予想される。

そこで，研究内容１で取り扱うことにした「変化の割合の考え方」を利用して，これらの疑問について説明し合う学習活動を位置づけた。

具体的には，「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」はグラフ上では，どこにあらわれるのかをお互いに説明し合うことで，変化の割合の考え方を用いると，関数のグラフの形状についての特徴をも明らかにしていけるように試みたのである。

【実践１】

変化の割合の見方を比例の学習から段階的に位置づける

比例 $y=ax$ のグラフの特徴を考える学習段階において，本校ではそれぞれの特徴のあらわれる根拠を必ず式で明らかにするようにしている。

例えば,「比例のグラフは必ず原点を通る」という特徴があらわれる。この根拠として，どんな比例においても（比例定数 a がどんな値のときでも），$x=0$ を比例の式 $y=ax$ に代入すれば，対応する y の値はいつでも 0 になるからと説明できる生徒の姿を目指して指導している。これは中学校数学において,「比例，反比例」を式で定義し直すことの意味を大切にしているからである。生徒たちは，どんな x や y の値についても，その性質が成り立つことが説明できるようにするためには，式でなくては言い切れないという立場で思考を進めている。

これと同じように，比例のグラフが直線になるのは，x の値がどこから１増加しても対応する y の値は，比例定数 a の値の分だけ増加するからだという根拠を式から明らかにするような学習活動を位置づけた。（比例 $y=2x$ のグラフを素材に）

生徒Ａ

「表からもわかるように，比例 $y=2x$ のグラフでは x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量は，いつでも２です。」

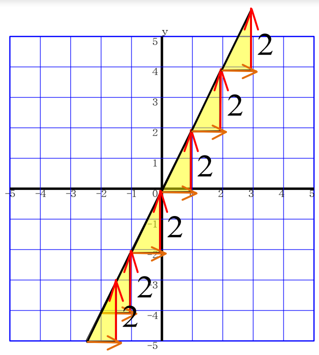


図２　変化の割合の考え方（具体的な比例定数で）

1　1　1　1　1　1

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

2　2　2　2　2　2

表１　変化の割合の考え方（具体的な比例定数について表）

この発言に対して，全体追究で次のような学習場面を仕組んだ。

教師「y の値の増加量はいつでも２ということだけど，それはどんな式の計算で求められますか？」

生徒「例えば，x の値が１から２まで１増加するときは対応する y の値が２（＝２×１）から４（＝２×２）まで２増加しているから４－２＝２という式の

計算で求められます。」

生徒「今の意見に付け足して，x の値が－2.5 から－1.5 まで１増加するときも，それに対応する y の値は－５（＝2×2.5）から－３（＝2×-1.5）まで２増加している。この性質はいつでも言えそうです。」

生徒Ｂ「いつでも言えることを確かめるには文字を使った式で考えるとよいから，僕は比例定数を a として，同じように比例 $y = ax$ について調べました。」

生徒Ｂ

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$-3a$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$	…

表２　変化の割合の考え方（比例定数 a にしたときの表）

「このことから，x の値がどこから１増加しても，対応する y の値は比例定数 a の値の分だけ増加するということがわかりました。」

これに対して，この発言を聞いていた生徒たちが，次のような交流を続けた。

生徒「比例定数 a のときにも，この性質が成り立つということは，比例定数がどんな値でもいいということだよね。」

生徒「ようするに，y が x に比例するときは，x の値がどこから１増加しても，対応する y の値は比例定数 a の値の分だけ増加すると言い切れるんだ！」

結論が一つにまとまりかけたところで，生徒Ｃが次のような質問をした。

生徒Ｃ

「確かに今，表に表した変域で x の値が１増加する場合，どこで考えても対応する y の値は，比例定数 a の値の分だけ増加しています。でも，この表にあらわせない数についてはどうなのかな？　それを含めて，いつでもいえることを文字を使った式とかで明らかにすることはできないのかな？」

生徒Ｃの発言を聞いて，にわかには理解できなかった周りの生徒たちも徐々にその意味（表の弱点）に気づき始めた。表は，その関数関係を表す x，y の値の組をいくつか挙げたものでしかないことを言っており，いつでもこの関係が成り立つことを言い切るためには，文字を用いて一般的に説明しなければならないことを言っているのである。

そこで，授業者が次のように板書をした。

x	…	t	$t+1$	…
y	…	at	$at+a$	…

表３　変化の割合の考え方（媒介変数を用いた表）

すると，それをみていた生徒Ｃが歓声をあげた。

生徒Ｃ「そっか！x の値がどこから１増加してもいいことを示すには，x の値を文字でおけばいいんだ！」

ここで，再度グループ交流を位置づけ，この考えについて話し合う時間を確保した。

生徒Ｂ「さっきと同じように考えると，x の値が t から１増加するときを考えるんだから，１増加した（先の）x の値は $t+1$ になる。そして，それぞれに対応する y の値は，比例の式（$y = ax$）の x に代入することで，at と $a(t+1)$ になるよね。そして，その差を求めると，$a(t+1)-at$ だから，分配法則を使って a になります。」

単項式と多項式の積という未履修の内容（第２学年）に触れてはいるものの，「文字は数の代表元である。」という理解を「数と式」領域の学習から継続してきた生徒たちにとっては，それほど抵抗なく理解できた。授業の終末には，生徒Ｂが授業の振り返りを次のようにまとめていた。

「今日の授業では，Ｃさんの考えを聞いて，比例では，比例定数やその変域に関係なく，x の値がどこから１増加する場合も（t がどんな値であっても），それに対応する y の値は，比例定数 a の値の分だけ増加するという規則性をもっています。だから，どんな比例についてもグラフは左図のようになっています。このことから，比例のグラフは直線になるとわかりました。（底辺が１，高さが a の直角三角形のがずっと続くイメージ）

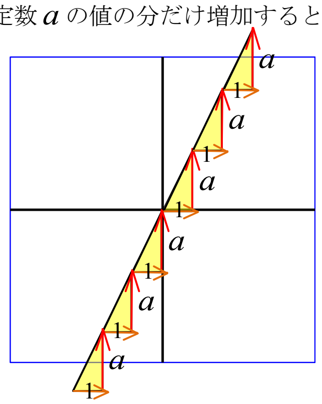


図３　変化の割合の考え方のグラフへのあらわれ方

次の反比例のグラフでも，x の値についても１増加するとき，対応する y の値の増加量には規則性があるのか調べてみたいと思います。」

【実践２】

変化の割合の考え方を反比例のグラフの考察に活用する

ここまで述べてきたように，比例のグラフの特徴についての考察で「変化の割合の考え方」を活用してきたことで，反比例のグラフの学習場面にどのような効果があったと考えられるかについて，ここから述べていく。

① 変化の割合の考え方を活用しようとする生徒の姿

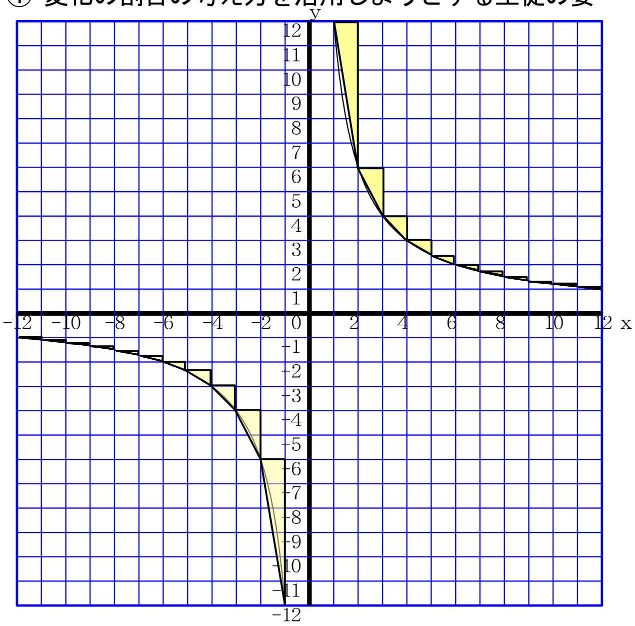


図４　変化の割合の考え方で反比例のグラフを調べる

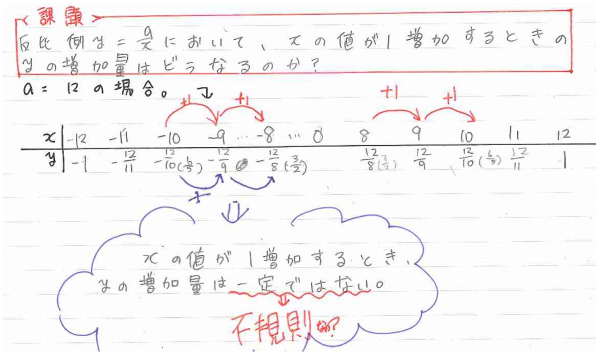
比例のグラフの学習で一度経験しているせいか，どの生徒も進んで x の値が１ずつ増加するときの y の値の増加量に着目して調べていた。この活動を通して，比例のグラフとは異なり，反比例のグラフでは，x の値が１ずつ増加するときの y の増加量が一定でないこと（底辺が１の三角形の高さが一定ではなく，どんどん大きくなったり，ちいさくなったりしていること）に改めて気づくことができていた。そこでは，次のようなやりとりが生み出されていた。

② 変化の割合の考え方と式をつないで考えようとする生徒の姿

グラフが y 軸から離れるに従って，直角三角形の高さが次第に低くなっていくことに気づいた生徒が次のようなやりとりを始めました。

生徒Ａ「x の値が１ずつ増加するときの y の増加量が，一定ではない。だから，y の値は不規則に変化するんじゃないかな？」

生徒Ｂ「え～。規則性はあると思うよ。だって実際に表と照らし合わせてみると…これらの数は各区間の両端の x 座標の積と関係がありそうじゃない？」



x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−4	−6	−12	×	12	6	4	…

表４　変化の割合の考え方（具体的な比例定数についての表）

生徒Ｂ「例えば，$a=12$ である反比例の場合，x の値が２から３まで１増加するとき対応する y の値は－２の増加になっています。これは２と３の積で比例定数 12 を割った数と関係があるんじゃないかな？」

生徒「本当だ！ $\dfrac{12}{2\times3}=2$ … ん？でも，負の符号がついてないな～？」

生徒Ｂ「じゃあ，負の符号をつけたらいいんじゃないかな？つけていいか，他のところでも調べてみよう。」

生徒「例えば，x の値が－３から－２まで１増加するとき，対応する y の値の増加量は－２です。

このとき，$-\dfrac{12}{(-3)\times(-2)}=-\dfrac{12}{6}=-2$

という式は，この区間における両端の x 座標の積で比例定数を割った数に－１をかけた数と一致しているんだね。」

生徒「本当だ！ x の値が１から２まで１増加するときも，成り立つよ。このときの対応する y の値の増加量は－6 になっているよ。」

生徒「x の値が１ずつ増加するときの y の増加量が，一定ではないけど，規則性はあるんだね！」

生徒Ｃ「私はこのことが，どの区間でも言えることを確かめるために，比例のときと同じように文字を使った式で考えてみました。

x	…	t	$t+1$	…
y	…	$\dfrac{a}{t}$	$\dfrac{a}{t+1}$	…

？

表５　変化の割合の考え方（媒介変数を用いた表）

x の値が t から $t+1$ まで１増加するときの y の値の増加量は右の式のようになりました。これは比例のグラフとは異なり，「x の値が１ずつ増加するときの y の増加量」が一定でないことを示していると思います。」

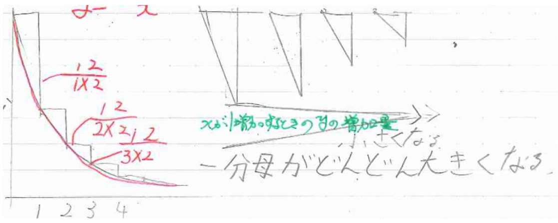
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{a}{t+1}-\frac{a}{t}\\=&\frac{at-a(t+1)}{t(t+1)}\\=&\frac{at-at-a}{t(t+1)}\\=&\frac{-a}{t(t+1)}\end{aligned}}$$

生徒「どんな値になるかは，式が複雑でよくわからないけど，x 座標の積によって決まるということは少なくとも定数ではないことがわかりそうだ。」

これらのやりとりと，前時までのグラフの学習における疑問について「x の値が１ずつ増加するときの y の値の増加量」の考え方を用いて，お互いに反比例のグラフの特徴について説明し合う姿も以下のようにみられた。

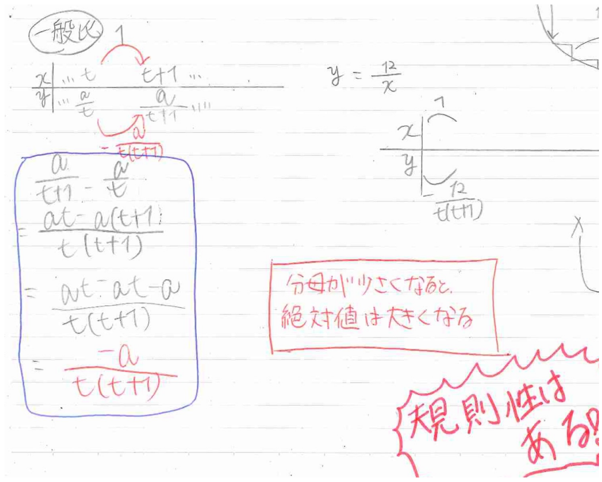
③ グラフの特徴を変化の割合の考え方で説明する姿

どんな曲線かという疑問に対して，先ほどの式を用いて説明できないか問いかけた。

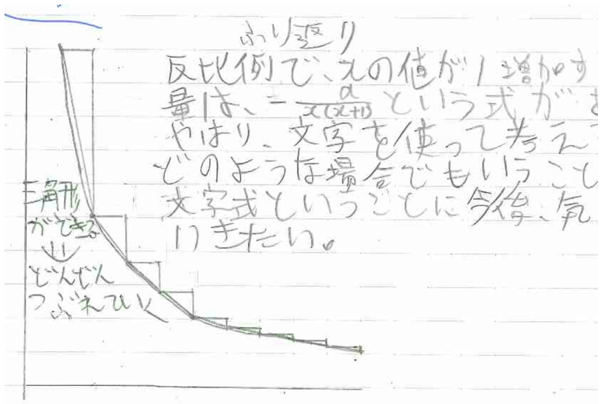


生徒「x の値の絶対値が大きくなるほどに（グラフが y 軸から離れるほど）$\dfrac{-a}{t(t+1)}$ の分母の値は大きくなり，この式全体としては小さくなっていきます。だから，グラフはどんどん０に近づいていきます。でも，a が定数である以上は０になることはありません。つまり，x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量は徐々に小さくなっていくけど，０にはならないから，グラフが x 軸と平行になることはないことがわかります。」

生徒「逆に，グラフが y 軸に近づけば近づくほど，x 座標が小さくなるから $\dfrac{-a}{t(t+1)}$ の分母の値は小さくなり，この式全体としては大きくなっていきます。」



生徒「この式の値がさっきの直角三角形の高さを表しているので，グラフが y 軸から離れるほどにどんどん三角形はつぶれていきます。」



このように変化の割合の考え方を用いて積極的に考える姿がいくつもみられた。この経験を通して，生徒の理解の中に「変化の割合」には関数によって一定でないものが存在するという認識が芽生えてきたことを感じるとともに，変化の割合を用いるとその変化の仕方をより詳しく調べられることに気付けている生徒が少なくなかったと捉えている。

４　まとめ

以上の実践から比例や反比例においても，変化の割合の考え方を取り入れることで，一次関数の学習段階に一定の効果を挙げられるという期待が得られた。

① 変化の割合を定義する第２学年までに，変化の割合が一定である「比例のグラフの特徴」と変化の割合が一定でない「反比例のグラフの特徴」に触れていることで，関数の中には，変化の割合が一定であるものとそうでないものがあるという視点をもって，一次関数のグラフの特徴についても比較的平等な立場で検証できる。

② 変化の割合とグラフの特徴を関連付けて説明する活動を位置付けたことにより，関数の変化の仕方を調べるときは「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」を調べていけばよいという見方を育てることができた。

以下に，②に関する生徒の振り返りのいくつかを紹介しておく。

ある区間で関数が増加するか減少するかというばくっとしたことだけでなく,「x の値が１増加するときの対応する y の増加量」を求めることによって，**変化の仕方をさらに詳しく知ることができる**。

「x の値が１増加するときの対応する y の増加量」は，比例のときは比例定数と一致するが，**反比例の場合は一致しない**。だから，比例の場合に，これを求めてもあまり活用できないが，反比例の場合は，「x の値が１増加するときの対応する y の増加量」が，**求める区間によって異なるので，活用できる**。求める区間によって異なるから，**どの区間について調べたかをはっきりさせておかないといけない**。

反比例で,「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」を求めると，x の値をどんどん大きくしていくとき，**その関数がどのように変化していくか**（どんどん０に近づいていくこと）**を予想することができる**。比例では，どこから x の値が１増加しても対応する y の値の増加量は変わらないから調べる必要がない。**反比例でこそ，調べる意味があるのだと思います**。

反比例のグラフで,「x の値の絶対値」をどんどん大きくしたり，０に近づけたりするとき，「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」がどのように変化するのかはっきりさせることができた。**反比例のように変化の仕方を予想しにくい関数でこそ，調べる意味がある**と思った。

反比例のグラフ「双曲線」は，表からプロットした点を**直線でつないではいけない（曲線でつなぐ）**ということを小学校で学習したけど,「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」を求めることで，**その理由がはっきりした**。

こうした振り返りからも明らかなように，変化の仕方を予想しにくい関数（変化の割合が一定でない関数）でこそ,「x の値が１増加するときの対応する y の値の増加量」を求める意味があるという意識を生徒の中に定着させることができたと捉えている。

以上のことから，次のように成果と課題をまとめることとした。

○ 反比例のグラフの特徴に関して「x の値が１ずつ増加するときの対応する y の増加量」に着目して説明することができた。これは変化の割合の考え方で今後の関数関係の特徴を捉えていく場面で，変化の割合が一定でないものがある前提で学習を進めていくことができるようになったことを示しており，この経験が，第３学年で学習する予定の関数 $y = ax^2$ などの変化の割合を求める場面で，その抵抗を減らすことが期待される。

● 関数 $y = ax^2$ で生徒が，さらに積極的に変化の割合を用いてグラフの特徴を考察できるように，第２学年でも区間によって変化の割合が変わる関数などを考えられるよう教材開発にも引き続き取り組んでいきたい。

参考文献

- 中学校学習指導要領解説 数学編
- 中学校数学科 関数指導を極める（明治図書）
- 文字式の活用：変化の割合の扱いに関連して（国宗 進，静岡大学教育学部研究報告）
- 思考・判断・表現による「学び直し」を求める数学の授業改善（磯田 正美・笠 一生，明治図書）（国宗 進，静岡大学教育学部研究報告）